

系所別	考試科目
經濟系	統計學

※ 考生請於答案卷內作答

考生得以攜帶僅具 $+-\times\div\sqrt{\%}$ 功能之簡易型計算機

一、是非題：本大題 10 分 (每小題 2 分)，無論對或錯，均請說明原因。

1. 若 Z_x, Z_y 分別是 X, Y 的標準化變數，則 X, Y 的相關係數等於 Z_x, Z_y 的相關係數。
2. $\text{Cov}(aX + b, cY + d) = ac \text{Cov}(X, Y)$ ， a, b, c, d 為任意常數
3. 若 $Y = a + bX$ ，其中 a, b 為常數，則 Y 之變異係數等於 X 之變異係數。
4. 若 $Y = a + bX$ ，其中 a, b 為常數，則 X 與 Y 之相關係數等於 1。
5. 若 $Y = X^2$ ，則 $E(Y) = [E(X)]^2$ 。

二、解釋名詞：本大題 20 分 (每小題 2 分)

1. 柴比氏定理 (Chebyshev's Theorem)
2. 經驗法則 (Empirical Rule)
3. 抽樣分配 (Sampling Distribution)
4. 中央極限定理 (Central Limit Theorem)
5. 不偏性 (Unbiasedness)
6. 一致性 (Consistency)
7. 絕對有效性 (Absolute Efficiency)
8. 相對有效性 (Relative Efficiency)
9. 貝氏定理 (Bayes' Theorem)
10. 變異數分析 (Analysis of Variance)

三、本大題 30 分 (每小題 6 分)

投擲兩個正四面體， X 表示兩個正四面體向下的那一面中數字較小者， Y 表示兩個正四面體向下的那一面的數字中為奇數者的個數，試問：

1. X 與 Y 的聯合機率分配為何？
2. X 的期望值與變異數。
3. Y 的期望值與變異數。
4. X 與 Y 的相關係數。
5. 求 $E(X | Y=1)$ 與 $V(X | Y=1)$ 。

四、本大題 24 分 (每小題 8 分)

若研究者準備針對 Y_t 和 X_t 進行迴歸模型的估計，而迴歸模型為：

$$Y_t = \beta X_t + \varepsilon_t; t = 1, 2, \dots, T; \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

1. 試用最小平方方法，推導迴歸係數 β 的最小平方推估式？(8 分)
2. 請推導迴歸係數 β 的變異數 $Var(\beta)$ 推估式？(8 分)
3. 若李同學蒐集下列數據，請分別計算 β 和 $Var(\beta)$ 的數值？(8 分)

X_t	1	2	3
Y_t	4	7	8

五、本大題 16 分 (每小題 8 分)

若研究者準備針對 Y_t 和 X_t 進行迴歸模型的估計，而迴歸模型為：

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \mu_t; t = 1, 2, \dots, T; \mu_t \sim N(0, \sigma_\mu^2)$$

1. 假定研究者將 Y_t 和 X_t 標準化(即 $Y_t^* = \frac{y_t - \bar{y}}{s_y}$ 且 $X_t^* = \frac{X_t - \bar{X}}{s_x}$ ，其中 $\bar{Y}$ 和 $\bar{X}$ 為平均數， s_y 和 s_x 為標準差)，並重新估計迴歸式 $Y_t^* = \alpha^* + \beta^* X_t^* + \mu_t^*$ ，請問 β 和 β^* 在何種條件下會相等？(8 分)
2. 另假定研究者重新評估迴歸式 $X_t = \alpha' + \beta' Y_t + \mu'_t$ ，請問 β 和 β' 在何種條件下會相等？(8 分)