

系 所 別	考試科目
資訊管理組、資科組二年級 (二部)	微積分

※ 考生請於答案卷內作答

1. 求拋物線 $y^2 = 4x$ 上的一點,使得它與直線 $x - y + 4 = 0$ 相距最近(5 分).

2. 求下列極限值:

(a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} (\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2}{n} \pi + \dots + \sin \frac{n-1}{n} \pi)$ (5 分)

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x}$ (5 分)

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})]$ (5 分)

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1})$ (5 分)

3. 函數 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 1 & \text{if } x = 0 \end{cases}$, 求 $f(x)$ 在 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 時的最大值與最小值(5

分). 然後再判別無窮級數 (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{n}$ (5 分) 與 (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{n^2}$ (5 分) 是收斂還是發散?

4. 右列無窮級數是收斂還是發散? (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos \frac{1}{n}$ (5 分), (b) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ (5 分),

(c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^2}$ (5 分)

5. 求右列積分值: (a) $\int_{-1}^4 |x^3 - 3x - 2| dx$ (5 分), (b) $\int_0^5 \frac{1}{(x-2)^2} dx$ (5 分),

(c) $\int_{-\infty}^0 \frac{2}{x^2 - 3x + 2} dx$ (5 分).

6. $f(x) = \cos^2 x$, 利用 $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ 求 $f(x)$ 在 $x = 0$ 處的泰勒展開式(5 分), 及高階導數 $f^{(10)}(0)$ (5 分) 與 $f^{(12)}(0)$ (5 分).

7. 求 $\exp(-\frac{x^2}{2})$ 在 $x = 0$ 處的泰勒展開式(5 分), 將此泰勒展開式代入定積分

$\int_0^{\frac{1}{2}} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx$ 之中，定積分就可以表達成一個交錯級數的形式，利用此交錯級數

求定積分的近似值，其誤差要求小於 $\frac{1}{10,000}$ (10 分).